

REGULADORES E OBSERVADORES FUZZY TAKAGI-SUGENO PARA VARIAR O ÂNGULO DA ARTICULAÇÃO DO JOELHO DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO

RUBERLEI GAINO*, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA*, APARECIDO AUGUSTO DE CARVALHO*, EDVALDO ASSUNÇÃO*, TONY INÁCIO DA SILVA*

*UNESP - Universidade Estadual Paulista
Departamento de Engenharia Elétrica, Campus de Ilha Solteira
Avenida Brasil, 56, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil

†UEL-Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Engenharia Elétrica, Campus Universitário

Emails: rgaino@aluno.feis.unesp.br, marcelo@dee.feis.unesp.br, aac@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, tysilva@gmail.com

Abstract— This paper shows, through theoretical studies and simulations, that using the description of the plant by Takagi-Sugeno fuzzy models, it is possible to design a nonlinear regulator with observer to control of the leg position of a paraplegic patient. The control system was designed to change the angle of the joint knee of 30° and 60°. This study generalizes previous results obtained by the authors, where the state vector of the plant was considered available.

Keywords— Takagi-Sugeno Fuzzy Models, Regulators, Rehabilitation Engineering.

Resumo— É demonstrado, por estudos teóricos e simulações, que é possível projetar um regulador com observador não-linear, para controlar a posição da perna do parapléxico, considerando a planta descrita por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. No caso, o sistema de controle foi concebido para variar o ângulo da articulação de 30° e 60°. Este estudo generaliza resultados prévios, utilizando realimentação das variáveis de estado da planta.

Palavras-chave— Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno, Reguladores, Engenharia de Reabilitação.

1 Introdução

O uso da eletroestimulação para controlar o movimento de pacientes parapléxicos, é um assunto antigo e relevante em engenharia de reabilitação. Por exemplo, modelos propostos por (Hill, 1938), e o interesse em seu emprego, para restauração das funções motoras, são cada vez mais difundidos na área médica. Em (Teixeira et al., 2006b) e (Teixeira et al., 2006a) foram realizados pela primeira vez estudos e simulações da posição da perna de um parapléxico, com eletroestimulação utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno (Tanaka et al., 1998) e (Teixeira and Zak, 1999). Foi adotado o modelo matemático da perna proposto por (Ferrarin and Pedotti, 2000), que relaciona o torque do músculo com a largura de pulso. Neste artigo são apresentados estudos adicionais aos desenvolvidos em (Teixeira et al., 2006b) e (Teixeira et al., 2006a). Com intenção de flexibilizar os resultados obtidos anteriormente, projetou-se o regulador considerando a velocidade da resposta, restrição no sinal de entrada e saída, no ponto de operação de 30°, com todas as variáveis de estados disponíveis. Em sistemas dinâmicos, na prática os estados nem sempre estão disponíveis. Se a planta do sistema for observável (Ogata, 2004) é possível estimar as variáveis de estados do sistema. Considerando a análise de forma análoga ao caso dos reguladores, usa-se o projeto com LMI's para obtenção da lei de controle do observador. O projeto do regulador com observador foi realizado no ponto de operação de 60°.

2 Modelo da Junção do Joelho

O modelo matemático do membro inferior empregado neste trabalho foi proposto por (Ferrarin and Pedotti, 2000). Este modelo relaciona a largura do pulso aplicado com o torque gerado em torno da articulação do joelho. Na modelagem (Ferrarin and Pedotti, 2000) consideraram o membro inferior como uma cadeia cinemática aberta composta de dois segmentos rígidos: a coxa, e o complexo canela-pé, conforme mostra a Figura 1. Os movimentos da junção do tornozelo não foram considerados, reduzindo o número dos graus de liberdade. A coxa foi considerada estacionária (isto é, fixa em uma mesa suporte) e assim somente a dinâmica de canela-pé foi considerada no modelo. Somente os movimentos do joelho, de flexão-extensão, foram considerados. Os comportamentos passivos do complexo do músculo-tendão da junção do joelho foram modelados pela rigidez M_s e uma componente de amortecimento M_d , que dependem respectivamente do ângulo do joelho e da velocidade angular. E também os componentes inercial M_i e gravitacional M_g foram considerados juntos com o torque ativo do joelho M_a , resultado da estimulação rectus femoris.

O equilíbrio dinâmico destes componentes em torno da junção do joelho é representado pela seguinte equação:

$$M_i = M_g + M_s + M_d + M_a. \quad (1)$$

Para simulação foram adotados os dados

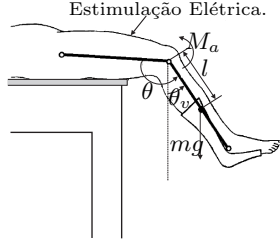


Figura 1: Complexo Canela Tornozelo

de (Ferrarin and Pedotti, 2000), que sugerem métodos para obtenção experimental dos parâmetros de interesse, mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do Sistema.

J	0.362 [Kg m^2]
m	4.37 [Kg]
l	23.8 [cm]
B	0.27 [Nm/s/rad]
λ	41.208 [Nm/rad]
E	2.024 [1/rad]
ω	2.918 [rad]
τ	0.951 [s]
G	42500 [Nm/s]

Em (Teixeira et al., 2006b) e (Teixeira et al., 2006a), demonstra-se que a equação de estados não-linear que representa o movimento da articulação do joelho ao estímulo elétrico aplicado no músculo rectus femoris é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_{21} & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix} P_N. \quad (2)$$

sendo que $\mathbf{x}_1 = \Delta\theta_v = \theta_v - \theta_{v0}$, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{x}}_1$, $\mathbf{x}_3 = \Delta\mathbf{M}_a - \mathbf{M}_{a0}$, o ponto de operação $(\theta_v, \dot{\theta}_v, \mathbf{M}_a) = (\theta_{v0}, 0, \mathbf{M}_{a0})$, em que \tilde{f}_{21} é uma não linearidade do sistema e P_N é a nova entrada do sistema,

$$P_N = P - \frac{M_{a0}}{G}. \quad (3)$$

$$\tilde{f}_{21} = \frac{1}{Jx_1} [-mgl\text{sen}(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} - (\Delta\theta_v + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega) + M_{a0}], \quad (4)$$

e

$$M_{a0} = mgl\text{sen}(\theta_{v0}) + \lambda e^{-E(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right). \quad (5)$$

Observa-se que em (4), quando for atribuído o valor zero à variável x_1 , ocorre um problema na determinação de \tilde{f}_{21} . Em (Teixeira et al., 2006b) e (Teixeira et al., 2006a) é apresentada uma solução para este problema.

3 Representação Utilizando Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

É possível representar certas classes de sistemas não-lineares com modelos fuzzy TS utilizando-se o método descrito em (Taniguchi et al., 2001). Neste método de construção, os modelos locais são obtidos em função da região de operação. O sistema fuzzy resultante é tido como a média ponderada dos modelos locais, e é dado por, (Tanaka et al., 1998).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))(\mathbf{A}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \\ &= \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

sendo que,

$$\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

$$\alpha_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{w^i(\mathbf{x}(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \quad \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_r]^T. \quad (7)$$

4 Dinâmica Não-Linear da Perna do Paraplégico Utilizando a Modelagem Fuzzy Takagi-Sugeno

Em (Teixeira et al., 2006b) e (Teixeira et al., 2006a) foi apresentada uma modelagem fuzzy Takagi-Sugeno, que representa exatamente o sistema (2), considerando os pontos de operação em θ_v em 30° e 60° respectivamente e baseando-se em (Taniguchi et al., 2001):

$$\alpha_1(\mathbf{x}(t)) = \frac{\tilde{f}_{21} - a_{212}}{a_{211} - a_{212}}. \quad (8)$$

e

$$\alpha_2(\mathbf{x}(t)) = \frac{\tilde{f}_{21} - a_{211}}{a_{212} - a_{211}}. \quad (9)$$

Os modelos locais de (2) foram os seguintes,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{211} & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{212} & \frac{-B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

$B_1 = B_2 = [0 \ 0 \ G/\tau]$, $a_{211} = -0.033$ e $a_{212} = -29.216$ para 30° e $a_{211} = -22.201$ e $a_{212} = -36.506$ para 60° .

Finalmente, definindo-se $u = P_N$ então (2) pode ser representado exatamente por,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i(x_1(t)) \left(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \right). \quad (11)$$

5 Reguladores com Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

De forma análoga à efetuada na obtenção de (6), o regulador fuzzy é dado por

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(\mathbf{x}(t))}, \\ &= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(t), \\ &= -\mathbf{F}(\alpha) \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

O objetivo do projeto do regulador fuzzy é determinar os ganhos de realimentação locais \mathbf{F}_i nas partes conseqüentes. Substituindo a equação (12) na equação (6) tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j) \mathbf{x}(t). \quad (13)$$

5.1 Análise da Estabilidade

Da equação (13), define-se,

$$\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j. \quad (14)$$

Então, de (13) tem-se que,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_{ij} \mathbf{x}(t), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}_{ii} \mathbf{x}(t) \\ &+ 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left\{ \frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right\} \mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (16)$$

sendo que por definição,

$$\sum_{i < j}^3 a_{ij} = a_{12} + a_{13} + a_{23}.$$

Lema 1 *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema fuzzy contínuo descrito por (6) é globalmente assintoticamente estável se existe uma matriz simétrica positiva definida comum \mathbf{P} tal que*

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0}, \quad (17)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.

Nosso maior interesse com relação ao Lema 1 é aplicá-lo no sistema realimentado (16), para projetar um regulador que estabilize o sistema. Considere candidata a função de Lyapunov, $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$. Então de (16),

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \mathbf{x}(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii}) \right. \\ &+ 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \left[\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} \right. \\ &\left. \left. + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \right] \right\} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Assim, verificando a equação (18), como $\alpha_i(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\alpha_1(\mathbf{x}(t)) + \dots + \alpha_r(\mathbf{x}(t)) = 1$, as três condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do sistema (6) realimentado com a lei de controle (12):

1. $\mathbf{P} > \mathbf{0}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$;
2. $\mathbf{G}_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ii} < \mathbf{0}$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$;
3. $\left(\frac{\mathbf{G}_{ij}^T + \mathbf{G}_{ji}^T}{2} \right) \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ji}}{2} \right) \leq \mathbf{0}$ para $i < j$.

5.2 Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs

Problemas como as análises de estabilidade e o projeto de controle podem ser reduzidos a problemas descritos por LMIs (Linear Matrix Inequalities). Numericamente, as soluções de LMIs, quando existem, podem ser obtidas muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas, disponíveis na literatura de programação matemática (Boyd et al., 1994). Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original. As técnicas de projeto usando LMIs também permitem a especificação da resposta transitória através da taxa de decaimento e a especificação de restrições nos sinais de controle e nas saídas.

Substituindo (14) na segunda condição e definindo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{X}$, tem-se que,

$$-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i > \mathbf{0}, \quad (19)$$

$i = 1, 2, \dots, r.$

Analogamente substituindo (14), na terceira condição tem-se,

$$\begin{aligned} &-\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T \\ &-\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (20)$$

$i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 2, 3, \dots, r \text{ e } j > i.$

Se (19) e (20) são factíveis e $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, os ganhos do controlador são, $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{X}$, $i = 1, 2, \dots, r.$

5.2.1 Estabilidade

Para a modelagem Takagi-Sugeno da planta com $\theta_{v0} = 30^\circ$, dada em (8)-(11), as LMIs (19) e (20) são factíveis para $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$ e os ganhos do controlador são dados por,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.21 & 0.13 & 0.04 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.22 & 0.13 & 0.04 \end{bmatrix}.$$

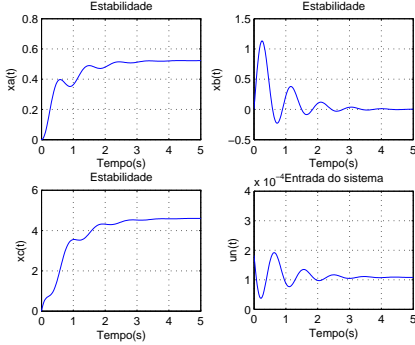


Figura 2: Resposta do controlador considerando somente a estabilidade.

Na Figura 2, $x_a(t) = \theta_v$, $x_b(t) = \dot{\theta}_v$, $x_c(t) = M_a$, $u_n(t) = P$.

5.3 Taxa de Decaimento

É importante considerar não apenas a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado, tais como a velocidade de resposta, restrições da entrada e da saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento (β). Considere uma função candidata a função de Lyapunov do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$, (com $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < \mathbf{0}$) para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. A taxa de decaimento β , $\beta > \mathbf{0}$ é obtida se a condição $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\beta V(\mathbf{x}(t))$ for satisfeita para toda a trajetória $\mathbf{x}(t)$ do sistema (Tanaka et al., 1998).

Analogamente ao cálculo das LMIs (19) e (20), considerando apenas a estabilidade do sistema, obtém-se condições suficientes para uma taxa de decaimento maior ou igual a β :

$$\begin{aligned} & -\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_i \\ & - 2\beta \mathbf{X} > \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, r.$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{X} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{M}_j^T \mathbf{B}_i^T - \mathbf{X} \mathbf{A}_j^T + \mathbf{M}_i^T \mathbf{B}_j^T - \mathbf{A}_i \mathbf{X} \\ & + \mathbf{B}_i \mathbf{M}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{B}_j \mathbf{M}_i - 4\beta \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 2, 3, \dots, r \text{ e } j > i.$$

Se (21) e (22) são factíveis e $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, os ganhos do controlador são, $\mathbf{F}_i = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{X}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

5.3.1 Estabilidade e Taxa de Decaimento, $\beta = 1$

As mesmas condições para a estabilidade, mas agora impondo uma taxa de decaimento $\beta = 1$. Podemos observar com isso que a velocidade da resposta transitória se torna mais rápida. Os ganhos do regulador, calculados das partir soluções de (21) e (22), com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$ e os modelos locais (10) dados por,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.21 & 0.31 & 0.13 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.28 & 0.28 & 0.12 \end{bmatrix}.$$

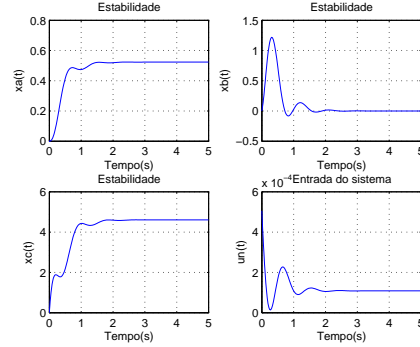


Figura 3: Resposta do controlador com $\beta = 1$.

O sistema da Figura 2 com $\beta = 0$, apresentou um tempo de estabelecimento de aproximadamente 3 segundos, enquanto na Figura 3, com $\beta = 1$ a taxa de estabelecimento foi reduzida para 2 segundos.

5.4 Restrição da Entrada

Considere que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida. A restrição $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (23)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M}_i^T \\ \mathbf{M}_i & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (24)$$

forem satisfeitas.

5.5 Restrição da Saída

Assuma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida e defina $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$.

A restrição $\|\mathbf{y}(t)\|_2 \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(0)^T \\ \mathbf{x}(0) & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (25)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} \mathbf{X} & \lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (26)$$

forem satisfeitas.

5.5.1 Estabilidade, Taxa de Decaimento $\beta = 1$, Condições Iniciais $[-\pi/6; 0; -M_{a0}]$, Restrição no Sinal de Entrada, $\mu = 0.06$

Depois de realizar vários testes, uma possível solução para o controle da posição da perna do paraplégico, atendendo os requisitos de estabilidade, taxa de decaimento e restrição no sinal de entrada é dada por $\beta = 1$ e $\mu = 0.06$.

Os ganhos do regulador para a solução factível das LMIs (21)-(24) com $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > \mathbf{0}$, foram as seguintes,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.53 & 0.03 & 0.08 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.62 & 0.09 & 0.09 \end{bmatrix}.$$

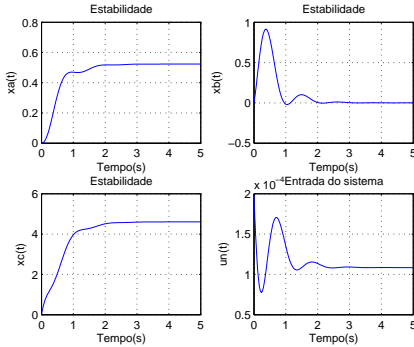


Figura 4: Resposta do controlador com $\beta = 1$ e $\mu = 0.06$.

Com $\beta = 1$ e $\mu = 0.06$, conseguimos diminuir a amplitude da lei de controle, como uma consequência da restrição no sinal de entrada, o tempo de estabelecimento passou a ser aproximadamente 2,5 segundos. No entanto este fato não compromete a resposta do sistema.

6 Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno

Em sistemas dinâmico, na prática os estados não estão disponíveis. Para sistemas lineares, um observador é viável se o sistema for observável, (Ogata, 2004). Nesta seção apresenta o conceito de observadores fuzzy. Em todo projeto de observadores fuzzy, um requisito a ser cumprido é que

$$\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (27)$$

sendo $\hat{\mathbf{x}}(t)$ denota o vetor de estado estimado pelo observador fuzzy. Isto garante que o erro em regime permanente entre $\mathbf{x}(t)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t)$ é $\mathbf{0}$.

O observador fuzzy possui as leis do observador de estado linear nas suas partes consecuentes. O observador fuzzy para o sistema contínuo (6) é o seguinte:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) (\mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_i \{\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\}), \quad (28)$$

e

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t). \quad (29)$$

Definindo-se $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, então de (6) tem-se que

$$\dot{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{x}(t)) \alpha_j(\mathbf{x}(t)) \{\mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}\} \mathbf{e}(t). \quad (30)$$

6.1 Projeto do Regulador com Observador de Estados Utilizando Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Foi demonstrado em (Ma et al., 1998) que o projeto dos ganhos do observador \mathbf{H}_i e do regulador \mathbf{F}_i , para $i = 1, 2, \dots, r$ pode ser feito separadamente. Este resultado é uma generalização do Principio da Separação, bem conhecido na teoria de sistemas lineares, e facilita o projeto de reguladores com observadores. Tendo em vista este fato, os projetos dos ganhos \mathbf{H}_i e \mathbf{F}_i podem ser executados separadamente a partir de (13) e (30). Com a lei de controle $u(t) = -\mathbf{F}(\alpha) \hat{x}(t)$, o sistema controlado é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \alpha_j(\mathbf{z}(t)) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j & \mathbf{B}_i \mathbf{F}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{C}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

6.2 Projeto Observadores Fuzzy Takagi-Sugeno baseados em LMIs

A seguir as apresentadas as condições suficientes para garantir a estabilidade com taxa de decaimento do observador. Considere a função de Lyapunov $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$. Então $\dot{V} < \mathbf{0}$, para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, se:

$$\mathbf{P} \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{M}_i \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{M}_i^T + 2\beta \mathbf{P} < \mathbf{0}, \quad (32)$$

sendo que $\mathbf{M}_i = \mathbf{P} \mathbf{H}_i$, e para $i < j$, $i = 1, 2, \dots, r$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} - \mathbf{C}^T \mathbf{M}_i^T + \mathbf{A}_j^T \mathbf{P} - \mathbf{C}^T \mathbf{M}_j^T + \mathbf{P} \mathbf{A}_i \\ & - \mathbf{M}_i \mathbf{C} + \mathbf{P} \mathbf{A}_j - \mathbf{M}_j \mathbf{C} + 4\beta \mathbf{P} \leq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (33)$$

6.2.1 Consideração para a Estabilidade e Taxa de Decaimento

Em (Ogata, 2004) sugere-se que o tempo de estabelecimento do observador deva ser aproximadamente cinco vezes mais rápido que o tempo de

estabelecimento do regulador. Considera-se as taxas de decaimento, do regulador e do observador respectivamente iguais a $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.5$. Com restrição no sinal de entrada $\mu = 0.005$. A seguir, mostra-se os resultados considerando a estabilidade com taxa de decaimento.

Os ganhos do regulador e observador para posicionar a articulação da perna respectivamente no ponto de 60° , são dados por,

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.21 & 0.17 & 0.12 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_1 \mathbf{X}^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.17 & 0.18 & 0.12 \end{bmatrix}.$$

e

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 8.52 \\ 86.15 \\ 2.07 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 11.54 \\ 79.34 \\ 0.85 \end{bmatrix}.$$

A seguir mostra-se os resultados estimados para a dinâmica do paciente paraplégico. O ponto de operação desejado é 60° (Teixeira et al., 2006a). Considerando a equação (31), o vetor de estado inicial é definido, $[\theta_v; \dot{\theta}_v; M_{ao}; e_1(0); e_2(0); e_3(0)] = [-\pi/3; 0; -8.76; -0.3; 0; -0.02]$.

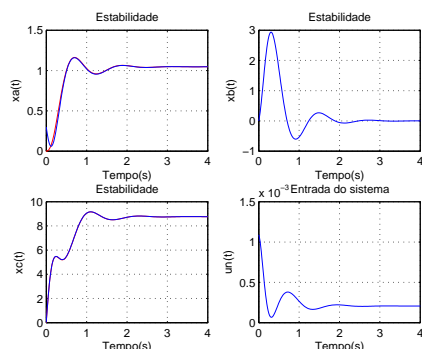


Figura 5: Regulador com Observador.

Estes resultados consideram o regulador e observador de estados para o ponto de 60° , onde $x_a(t) = \theta_v$, $x_b(t) = \dot{\theta}_v$, $x_c(t) = M_a$ e $u_n = P$.

7 Conclusões

Foi apresentado o projeto e simulações de um regulador com observador para o controle não-linear da posição da perna de um paciente paraplégico, descrito por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Os bons resultados obtidos demonstram a viabilidade do método. O mesmo estudo foi feito em (Teixeira et al., 2006b) e (Teixeira et al., 2006a), sem restrições físicas do regulador e considerando o vetor de estados disponível. O procedimento proposto é rigoroso, baseado em LMIs e utiliza funções de Lyapunov na análise da estabilidade.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro recebido da FAPESP e do CNPq.

Referências

- Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Ferrarin, M. and Pedotti, A. (2000). The Relationship Between Electrical Stimulus and Joint Torque: A Dynamic Model, *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering* **8**(3): 342–352.
- Hill, A. V. (1938). The heat of shortening and the dynamic constant of muscle, *Proceedings of the Royal Society B*(126): 136–195.
- Ma, X. J., Sun, Z. Q. and He, Y. Y. (1998). Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(1): 41–51.
- Ogata, K. (2004). *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice Hall, Brasil.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, O. H. (1998). Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohatake, H. and Wang, H. O. (2001). Model Construction, Rule Reduction, and Robust Compensation for Generalized Form of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–537.
- Teixeira, M. C. M., Deaecto, G. S., Gaino, R., Assunção, E., Carvalho, A. A. and Farias, U. C. (2006a). Design of a Fuzzy Takagi-Sugeno Controller to Vary the Joint Knee Angle of Paraplegic Patients., *Lectures Notes in Computer Science Springer Berlin/Heidelberg* **4234**(3): 118–126.
- Teixeira, M. C. M., Deaecto, G. S., Gaino, R., Assunção, E., Carvalho, A. A. and Farias, U. C. (2006b). Projeto de um Controlador Fuzzy Takagi-Sugeno para Variar o Ângulo da Articulação do Joelho, *XVI Congresso Brasileiro de Automática* (XVI): 2287–2292.
- Teixeira, M. C. M. and Zak, S. H. (1999). Stabilizing Controller Design for Uncertain Non-Linear Systems Using Fuzzy Models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2): 133–142.